الخميس 2015/11/19

السادسة :

دالة sin دورية لا يمكن أن تكون متباينة . لذلك يكفي دراستها على دور واحد ونجعلها متباينة ندرسها على الفترة $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

- اذا أخذنا أي مستقيم // ox نقطتان مختلفتان اللذان sin لهما واحد .
بالتالي الدالة غير متباينة.
يجب تقطيع الدالة
نأخذ مستقيم // ox ونجعله يقطع الدالة
فيقطعها في نقطتين مختلفتين اللذان sin لهما واحد فهي غير متباينة (طريقة لإثبات التباين).

$\sin(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ $\sin[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] = [-1, 1]$

اذا كان المستقر = المستقر النهائي تصبح غامرة.

$\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1]$

- حديث عن دالة القفز.

الدالة :

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

ليست ذ.ت.م , ليست مستمرة عند النقطة 0.

- معنا تكامل ستيلتجس : المجموع.

$$S(f, g : P) = \sum_{k=1}^{n} f(z_k) \cdot \Delta g(x_k).$$

اذا وجدت نهاية محددة وكانت مستقلة عن طريقة اختيار النقاط من الجزئات وعن طريقة التجزئة نفسها.

$$P = \{ a = x_0, x_1, \dots, x_n = b \}$$

$$\lim_{n \to \infty} (\lambda(P) \to 0)$$

اذا وجدت هذه النهاية وكانت ... نقول أنه لدينا تكامل ستيلتجس هو قيمة هذه النهاية.

- لماذا الدالة $\frac{1}{x}$ (يقطع الإثنان) في ما هي الأول والثالث .

ملاحظة:

عدم وجود التكامل في الطرف الأيسر في هذه الخاصية (4) ⇐ وجود التكاملين في الطرف الأيمن (عن طريق التعريف) (لا نعرف غيرها حتى الآن).
إلا أن العكس ليس صحيحاً في الحالة العامة وهذا خلاف تكامل ريمان. السبب أنه هنا تكامل دالة بالنسبة لدالة وليس مثل ريمان (تكامل دالة بالنسبة لمتغير). والمثال التالي يؤكد ذلك.

مثال:

$$f(x) = \begin{cases} 0 ; & -1 \le x \le 0 . \\ ② ; & 0 < x \le 1 . \end{cases}$$
ثابت A

f

(1, 2)

$$g(x) = \begin{cases} 0 ; & -1 \le x < 0 . \\ ② ; & 0 \le x \le 1 . \end{cases}$$
أي ثابت A

يمكننا وبسهولة إثبات أن كل من التكاملين:

$$\int_{-1}^{0} f\,dg \quad , \quad \int_{0}^{1} f\,dg$$

موجود كل من هذين التكاملين وقيمة كل منهما صفر.

$$dg = \Delta(g(x_k)) = 0 - 0$$

$$\int_0^1 2\,dg(x) = g(x_k) - g(x_{k-1}) = 2 - 2 = 0$$

$$\lim f(Z_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})] = (2-2) = 0$$

- حيث في التكامل الأول نجد أن $f=0$ في الفترة $[-1,0]$ بينما التكامل الثاني فالدالة g ثابتة على فترة المكاملة $[0,1]$ وتغيراتها معلومة

$$2 \sum_{k=1}^{n} [\Delta g(x_k)] = 2(n \times 0) = 0$$

وفي نفس الوقت التكامل المفروض $\int_{-1}^{1}$ غير موجود.

$$\lim S(f, g; P) \nexists$$

- السبب الأول هو أن نهاية المجموع $\lim S(f, g; P)$ غير موجودة.

(نميله نهائياً). (عندما نكامل دالة بالنسبة لدالة مثلاً نفس نقاط الانقطاع فالتكامل مستحيل غير موجود).
أي: الأسباب: عدم استمرار الدالتين f, g في النقطة $x=0$ مما يدعونا إلى القول أنه $J=\int_{-1}^{1} f\,dg = 0$

فيما يخص هذه الخاصة والعقبات التي واجهتنا لدينا:
(*) تعميم للخاصة 4: اذا كانت $a<c<b$ وكان كل من التكاملين $\int_a^c f\,dg$ ، $\int_c^b f\,dg$ موجوداً وكانت احدى الدالتين f أو g

{اذا جعلنا الدالة f مستمرة أي كانت $z=2$ من أجل كل الفترة علينا جعل الثانية محدودة}
مستمرة في النقطة $x=c$ وجوارها والأخرى محدودة في جوارها (بجوار النقطة $x=0$ كما في المثال السابق) عندها يكون التكامل:
$$J=\int_a^b f\,dg$$
موجوداً وزيادة على ذلك تتحقق العلاقة (4) السابقة في الخاصة (4).
خا 5) <التكامل بالتجزئة>:
توجد علاقة بين الدالتين f, g في التكامل المعطى هذه العلاقة هي أنه وجود التكامل $\int_a^b f\,dg$ $\Leftrightarrow$ وجود التكامل $\int_a^b g\,df$.
$$\left\{ \int_a^b u\,dv = [u.v] - \int v\,du \right\} \text{ (*) } = \}$$
{ونعوض بهما تعويضاً مباشراً؟}
والعكس صحيح أيضاً، مما يسمح بتبديل الدور بين f, g. وتتحقق العلاقة ~~(*) السابقة~~
$$\int_a^b f\,dg = [f(x).g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g\,df.$$
(5)
$$[f.g]_a^b = f(b) * g(b) - f(a).g(a)$$
في صيغة التكامل بالتجزئة نبدأ بالتكامل الذي هل ماذا هل.
مثال: < على صيغة التكامل تجزئة >:

لنفرض أن الدالة f مشتقة مستمرة على $[a,b]$ أو $]a,b[$ والمطلوب هنا إثبات صحة العلاقة:

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,\langle x\rangle\,dx + f(a)\langle a\rangle - f(b)\langle b\rangle$$

حيث العبارة $\sum_{a<n\leq b}$ تعني أن: $\sum_{n=[a]+1}^{n=[b]}$

وأن: $\langle x\rangle = x - [x]$

علماً أن جميع التكاملات موجودة.

الإثبات: فكرة

حسب صيغة التكامل بالتجزئة (5) لدينا:

$$\int_a^b f(x)\,d\langle x\rangle + \int_a^b (x-[x])\,df$$

$$= f(b)[b-[b]] - f(a)[a-[a]].$$

نكمل حسب خواص التكامل.

مثال (حول تكامل ستيلجس باستخدام التعريف):

لنعرف على الفترة $[1,5]$ الدالتين التاليتين:

$$d(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in [1,5] \cap Q \\ 0 & ; \quad x \in [1,5] - Q \end{cases}$$

x عدد عادي من الفترة.

x " غير " " "

$$g(x) = 7x + 3$$

المطلوب: أوضح فيما إذا كان تكامل ستيلجس موجوداً أم لا مع التعليل

$$J = (S)\int_1^5 d(x)\,dg(x).$$

علماً إن كان موجوداً فاحسبه.

أول ما نقوم به هي تجزئة الفترة المفروضة أي :

$$P_{[1,5]} = \{a = x_0 , x_1 , \dots , x_n = \underset{(5)}{b}\}$$

{أحيانا نبدأ بـ $x_0 = b$ حسب ضرورة المسألة }.

- نشكل الآن المجموع التالي:

$$S(f, g; P) = \sum_{k=1}^{5} f(z_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})]$$

$$= \sum_{k=1}^{5} f(z_k)[7x_k + \cancel{3} - 7x_{k-1} - \cancel{3}]$$

$$= 7\sum_{k=1}^{n} f(z_k)[\underbrace{x_{k+1} - x_k}]$$

طول أي فترة جزئية.

حيث z_k نقاط اختيارية من الفترات الجزئية: $[x_{k-1}, x_k]$
باختيار z_k عددا عاديا من الفترة الجزئية $[x_{k-1}, x_k]$ وعندها يكون المجموع المقابل لها:

$$S(f, g; P) = 7\sum_{k=1}^{n} 1 . (x_k - x_{k-1})$$

$$= 7(5-1) = 28 . \quad (1)$$

ومنه أيا كانت التجزئة P للفترة $[1,5]$ والتي بها نختار z_k عدد Q من أجل نفس التجزئة، فيما لو اخترنا z_k عدد غير عادي من الفترات الجزئية $[x_{k-1}, x_k]$ نجد:

$$S(f, g; P) = 7\sum_{k=1}^{n} 0 (4) = 0 \quad (2)$$

حيث P تجزئة للفترة $[1,5]$، z_k عدد غير عادي.

ومنه:

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} S(f, g; P) = \begin{cases} 28 ; & z_k \in Q \\ 0 ; & z_k \in \tilde{Q} \end{cases} \quad (3)$$

$\tilde{Q}$ متممة Q.

من ③ نجد أن النهاية للمجموع التكاملي لستيلجس غير موجود وذلك لأن النهاية تتعلق باختيار النقاط z_k عدد عادي أو غير عادي.
أي أن الدالة f ليست كمولة حسب مفهوم ستيلجس بالنسبة لأي دالة على الفترة المعطاة.

ملاحظة:
بما أن النهاية أو التكامل غير موجود كما أسلفنا هذا يعني أننا لا نستطيع حسابه.

3) **الحالات والشروط العامة لوجود تكامل ستيلجس:**
من أجل ذلك نفترض أن الدالة g متزايدة باطراد (متزايدة تماماً) على $[a,b]$
أي: $\Delta g(x_k) \geq 0$ دوماً على $[a,b]$ وذلك من أجل أي تجزئة للفترة $[a,b]$ مع أن f و g دالتين محدودتين عليها.
ولنورد الآن الرمزين التاليين المعرفين:

$$M_k(f) = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} \{f(x)\} \quad , \quad m_k(f) = \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} \{f(x)\}$$

حيث: $1 \leq k \leq n$.

وكذلك: $I_k = [x_{k-1}, x_k]_{k \geq 1}$

والعلاقة التالية صحيحة:

$$\begin{aligned} \omega_k(f) &= M_k(f) - m_k(f). \\ &= \sup_{x, y \in I_k} \{f(x) - f(y)\}. \end{aligned}$$

حيث: $\sup_x \{-x\} = -\inf_x x$

مثل $\sin$

حيث: $\omega_k(f)$ هو تواتر الدالة f في الفترة الجزئية I_k.

تعريف:
نسمي المجموعتين التاليين على الترتيب:

$$U(f, g; P) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f) \cdot \Delta g(x_k)$$

$$L(f, g; P) = \sum_{1}^{n} m_k(f) \cdot \Delta g(x_k)$$

حيث:

$$\lambda(P) = \|P\| = \max_k(\Delta x_k)$$

مجموعي ستيلجس الأعلى والأدنى للدالة f بالنسبة للدالة g المرافقتين للتجزئة P للفترة [a,b]

ونلاحظ أن هذه المجاميع تتعلق فقط بالتجزئة P للفترة [a,b] و لا تتعلق باختيار النقاط Z_k للفترة: $[x_{k-1}, x_k]$.

4) خواص مجاميع ستيلجس تشمل خواص تكامل ريمان مطلوب من الكتاب.

الفرق أن في ريمان لا وجود ل g.

تعريف:
نسمي العددين التاليين (علماً أن g دالة متزايدة باطراد على [a,b])

$$\overline{J} = J_U(f, g) = \int_{a}^{\overline{b}} f\,dg = \inf_P \{U\} \leq U(f, g; P)$$

$$\underline{J} = J_L(f, g) = \int_{\underline{a}}^{b} f\,dg = \sup_P \{L\} \geq L(f, g; P)$$

تكاملي ستيلجس الأعلى والأدنى على الترتيب. للدالة f بالنسبة للدالة g على الفترة [a,b].

من كل ما سبق نحصل على المتراجحات الصحيحة:

$$L \leq \underline{J} \leq \overline{J} \leq U(f, g; P)$$

أو اختصاراً:

$$(U - L \geq 0) \quad U \geq L$$

مثال:

بالعودة إلى مثال دالة ديرخليه φ الثابت حيث أن متناقضة أنه دالة ديرخليه غير مكمولة بالنسبة لأي دالة g على الفترة $[a,b]$ علينا الآن من خلال نتيجة المثال أيضاً على أن $\underline{J} \neq \overline{J}$ مما يعني أنها غير مكمولة. (طريقة ثانية).

حيث:

$$U = \sum_{k=1}^{n} M_k(\varphi) \cdot \Delta g(x_k)$$

$$= 1 \cdot 7 \cdot 4 = 28.$$

$$h = \sum_{k=1}^{n} m_k(\varphi) \cdot \Delta g(x_k) = 0$$

وهذين المجموعين أوجدناهما من أجل أي تجزئة P للفترة $[1,5]$ ومنه يكون:

$$\overline{J} = J_U = \int_1^5 \varphi \, dg = \inf_P \{U\} = 28.$$

$$\neq$$

$$\underline{J} = J_h = \int_1^5 \varphi \, dg = \sup_P \{h\} = 0$$

نستنتج من هنا أن $\overline{J} \neq \underline{J}$ مما يعني أن تكامل ستيلجس للدالة ديرخليه بالنسبة للدالة J المفروضة غير موجود أي φ غير مكمولة. بالنسبة للدالة g المفروضة على $[1,5]$.

مبرهنة (الشرط الأول):

لتكن f و g دالتان محدودتان على $[a,b]$ وإذا كانت g دالة متزايدة باطراد على الفترة $[a,b]$ فالعبارتين التاليتين متكافئتان:

(1) التكامل: $J = \int f \, dg$ يكون موجوداً أي f مكمولة بالنسبة لـ g على $[a,b]$

(2) $\overline{J} = \underline{J}$

وهذا يعني إلى الشرط اللازم والكافي لوجود تكامل ستيلجس كما وضحنا هنا أنه يكون ستيلجس أيضاً موجود إذا كانت: $\lim_{\lambda(P) \to 0} (U - h) = 0$